生物统计学

第八章 双样本的假设检验

云南大学 生命科学学院

會澤百家 至公天下

服从 χ^2 分布的两个随机变量除以各自的自由度后再相除，所得随机变量 F 服从双自由度 n_1-1 和 n_2-1 的 F 分布，即

$$F=\frac{\frac{\chi^2(n_1-1)}{n_1-1}}{\frac{\chi^2(n_2-1)}{n_2-1}}\sim F(n_1-1,n_2-1) \tag{8.1}$$

将 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 代入上式，得

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\times\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n_1-1,n_2-1) \tag{8.2}$$

基于 F 分布的检验方法称为F 检验。

比较两个样本方差时，作零假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，备择假设 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

当零假设成立时，将上式中两个总体方差消去，得检验统计量

$$F_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{8.3}$$

通过 F 分布的累积分布函数计算相伴概率，

或通过分位数函数计算显著性水平 α 下的检验临界值。

例 (8.1)

例题 5.6 断言不同摄入方式的总体方差具有同质性。试检验该说法。

例 (8.1)

例题 5.6 断言不同摄入方式的总体方差具有同质性。试检验该说法。

例 (5.6)

为研究维生素 C 的剂量 $(0.5, 1, 2$ 毫克/天) 和摄入方式 (橙汁，记为 OJ；抗坏血酸，维生素 C 的一种形式，记为 VC) 对豚鼠牙齿生长的影响，60 只豚鼠分为 6 组进行试验 (每个处理组 10 个重复，使用 R 自带数据包 `datasets` 中的 `ToothGrowth` 数据集)。已知不同摄入方式的总体方差同质。试对两种不同的摄入方式下豚鼠牙齿长度之差做置信度为 0.95 的区间估计。

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，备择假设 $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
    - 检验统计量 $F_c = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{43.63344}{68.32723} \approx 0.639$；
    - 双尾 F 检验的 P 值：
      $P(F \leq F_c \approx 0.639 | H_0) + P(F \geq 1/F_c \approx 1.565 | H_0) \approx 0.233$。
4. 作出统计推断。

   不同摄入方式的总体方差无统计学意义上的显著差异。

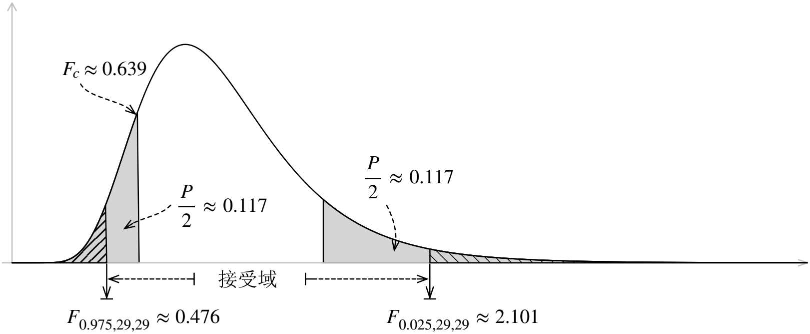


图 **8.1** 例题 8.1 的检验统计量与 P 值

假设样本容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别抽自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$。

当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，样本平均数之差服从正态分布，标准化后服从标准正态分布。

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} \tag{8.11}$$

双尾检验时，假定零假设 H_0 成立，即 $\mu_1 = \mu_2$，计算检验统计量

$$z_c = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} \tag{8.12}$$

并与检验临界值比较，如果 $z_c > z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z_c < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ 则拒绝零假设，反之接受零假设。

或者计算相伴概率$P(|z| \geq |z_c|\,|H_0)$，与显著性水平α 比较，如果 $P < \alpha$ 则拒绝零假设，反之接受零假设。

例 (8.3)

某养殖单位测定了 32 头牛犊和 48 头成年母牛的血糖含量（单位：mg/100mL），结果显示牛犊平均血糖含量为 81.23，成年母牛平均血糖含量为 70.63。已知牛犊血糖含量总体标准差为 15.64，成年母牛血糖含量的总体标准差为 12.08。试问牛犊和成年母牛的血糖含量有无差异?

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 检验统计量 $z_c = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} = \dfrac{81.23 - 70.63}{3.268667} \approx 3.243$；
   - 双尾 z 检验的 P 值：$P(z \geq z_c | H_0) \times 2 \approx 0.001$。
4. 作出统计推断。

   牛犊和成年母牛的血糖含量具有统计学意义上的显著差异。

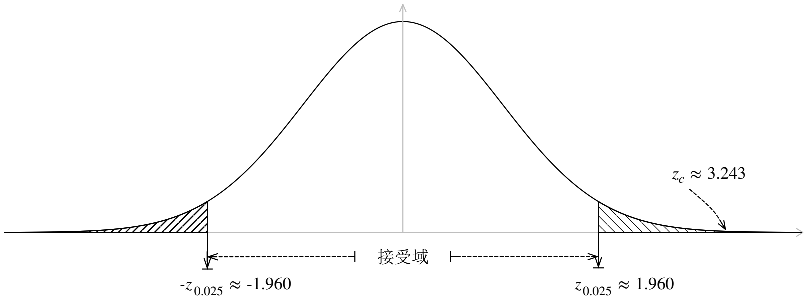
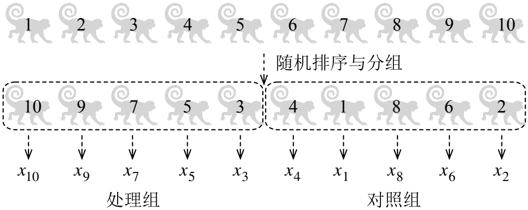


图 **8.3** 例题 8.3 的检验统计量与 P 值

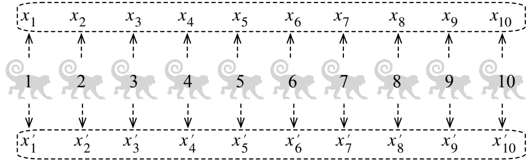
1. 样本方差之比的检验
2. 样本平均数之差的检验
   - 总体方差已知
   - 总体方差未知
3. 样本比率之差的检验
4. 抽样分布的应用总结

当总体方差 σ_1^2、σ_2^2 未知时，用样本标准差 s_1 和 s_2 分别代替 σ_1 和 σ_2。虽然样本平均数之差仍服从正态分布，标准化统计量则服从 t 分布。

因此，可用 t 检验判断两个样本平均数 $\overline{x}_1$ 和 $\overline{x}_2$ 所属的总体平均数 μ_1 和 μ_2 是否相等。


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
随机排序与分组
10 9 7 5 3 4 1 8 6 2
x_{10} x_9 x_7 x_5 x_3 x_4 x_1 x_8 x_6 x_2
处理组
对照组

(a) 成组设计


处理组
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x_1' x_2' x_3' x_4' x_5' x_6' x_7' x_8' x_9' x_{10}'
对照组

(b) 配对设计

检验统计量 t 的计算公式为

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} \tag{8.14}$$

其中两个样本平均数之差的样本标准误为

$$s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{8.15}$$

检验统计量 t 的计算公式为

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} \tag{8.14}$$

其中两个样本平均数之差的样本标准误为

$$s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{8.15}$$

双尾检验时，假定零假设 H_0 成立，即 $\mu_1 = \mu_2$，计算检验统计量

$$t_c = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \tag{8.16}$$

例 (8.5)

为研究两种激素类药物对肾组织切片的氧消耗的影响，研究人员设计了对比试验，得数据如下：A 药物，$n_1 = 9$，$\overline{x}_1 = 27.92$，$s_1^2 = 8.67$；B 药物，$n_2 = 6$，$\overline{x}_2 = 25.11$，$s_2^2 = 2.84$。试问两种药物对肾组织切片氧消耗的影响是否有显著差异?

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，备择假设 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. **对方差同质性进行 F 检验。**
4. 计算检验统计量和 P 值。
   - 检验统计量 $t_c = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} = \dfrac{27.92 - 25.11}{1.336215} \approx 2.103$；
   - 双尾检验的 P 值：$P(t \geq t_c \approx 2.103|H_0) \times 2 \approx 0.056$。
5. 作出统计推断。

   两种药物对肾组织切片氧消耗的影响没有统计学意义上的显著差异。

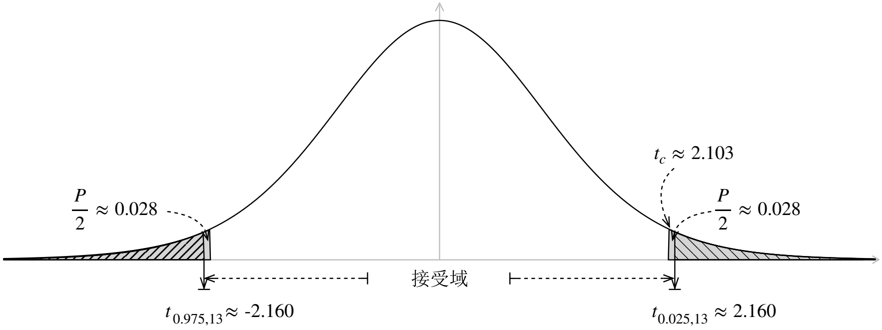


图 **8.5** 例题 8.5 的检验统计量与 P 值

例 (8.7)

例题 8.2 中（**InsectSprays** 数据集），喷洒杀虫剂 A 和杀虫剂 C 的农田在单位面积害虫的数量上是否有显著差异?

例 (8.2)

为了比较 6 种不同杀虫剂 (编号 A～F) 的杀虫效果，一项农田试验统计了喷洒杀虫剂后，单位面积害虫的数量 (R 自带数据包 **datasets** 中的 **InsectSprays** 数据集)。试比较其中杀虫剂 A 和杀虫剂 C 杀虫效果的总体方差是否同质。

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，备择假设 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 检验统计量 $t' = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} = \dfrac{14.5 - 2.083333}{1.476884} \approx 8.407$;
   - 双尾检验的 P 值：$P(t \geq t_c \approx 8.407 | H_0) \times 2 = 5.278477\text{e} - 07$。
4. 作出统计推断。

   杀虫剂 A 和杀虫剂 C 的杀虫效果具有统计学意义上的显著差异。

设有 n 对成对的样本，每一对观测值 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n$，各对观测值的差数为 $d_i = x_i - y_i$。则样本差数的平均数为

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \overline{x} - \overline{y} \quad (8.17)$$

设有 n 对成对的样本，每一对观测值 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n$，各对观测值的差数为 $d_i = x_i - y_i$。则样本差数的平均数为

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \overline{x} - \overline{y} \quad (8.17)$$

而样本差数的方差为 $s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}{n-1}$，所以差数平均数的标准误为 $s_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{s_d^2}{n}}$。那么对样本差数的平均数标准化，则有

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_{\overline{d}}} \quad (8.18)$$

服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布。

例 (8.9)

例题 8.8 中，假如测试的数据分别来自 10 位受试者，每名受试者用两种安眠药后记录睡眠延长时间。在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，试问两种安眠药的疗效有无显著差异?

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，备择假设 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 检验统计量 $t_c = \dfrac{\overline{d}}{s_{\overline{d}}} = \dfrac{-1.58}{0.3889587} \approx -0.406$；
   - 双尾检验的 P 值：$P(t \leq t_c | H_0) \times 2 \approx 0.003$。
4. 作出统计推断。

   两种安眠药的睡眠延长效果上有统计学意义上的显著差异。

1 样本方差之比的检验

2 样本平均数之差的检验

3 样本比率之差的检验

4 抽样分布的应用总结


SELF
LEARNING

$$\text{s.s.} = f(x, \theta) \sim \textbf{sampling distribution}$$

其中 x 表示可观察的样本信息，θ 表示不可观察的未知总体参数。

- 对于区间估计问题，利用的是 $\theta = f'(x, \text{s.s.})$。抽样分布提供的概率信息反映在以样本统计量为中心的区间范围上，即置信度$1-\alpha$。
- 对于假设检验问题，利用的是 $x = f''(\theta, \text{s.s.})$。抽样分布提供的概率信息反映在比样本统计量更极端值的概率上，即相伴概率 P 值。

本章小结

1. 样本方差之比的检验
2. 样本平均数之差的检验
   - 总体方差已知
   - 总体方差未知
3. 样本比率之差的检验
4. 抽样分布的应用总结